Следствие 1. $B^{*}_{m}(3) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $m \neq 2k$, $k \geq 1$.

Теорема 3. Многообразие $B^{*}_{2k}(3)$ тернарных групп определяется двумя тождествами

$$[\underbrace{x \ldots x}_{2k+1}] = x, \quad [\underbrace{xy \ldots xy}_{2k} x] = x.$$

Выше было установлено, что многообразие $B_m(3)$ определяется тождеством

$$[\underbrace{xy \ldots xy}_{m} x] = x;$$

которое при $m = 2k$ совпадает с последним тождеством из теоремы 3. Поэтому имеет место

Следствие 2. Если $m = 2k$, $k \geq 1$, то $B^{*}_{m}(3)$ – непустое подмногообразие многообразия $B_m(3)$.

Следствие 3. Многообразие $B^{*}_{2}(3)$ тернарных групп определяется двумя тождествами

$$[xxx] = x, \quad [xyxyx] = x.$$

УДК 512.548

О КОНГРУЭНЦИЯХ ТЕРНАРНОЙ ГРУППЫ

Гальмак А.М., Овсянникова И.П.

УО «Могилевский государственный университет продовольствия»
Могилев, Беларусь

Тернарные группы выделяются среди всех универсальных алгебр рядом присущих им замечательных свойств, редко встречающихся у других универсальных алгебр. Перечислим некоторые из таких свойств, связанных с конгруэнциями:

1) любые две конгруэнции тернарной группы перестановочны [1];

2) тернарная группа имеет модулярную решётку конгруэнций [1];

3) в тернарной группе любые две конгруэнции, имеющие общий смежный класс, совпадают [1];

4) в тернарной группе все смежные классы по одной и той же конгруэнции имеют одинаковую мощность [2];

5) класс конгруэнции тернарной группы, включающий в себя тернарную подгруппу, является полуинвариантной тернарной подгруппой [2];

6) любой класс конгруэнции тернарной группы можно выразить через один и тот же класс этой же конгруэнции [3].

Согласно теореме Биркгофа ([4], теорема VII.3.4), свойство 2) является следствием 1). Свойство 2), ввиду теоремы Хагемана [5], следует также и из 3). В свою очередь свойство 3), ввиду теоремы 32.4 [6], вытекает из 4).

Все перечисленные выше свойства являются общими для групп и тернарных групп. Однако, между конгруэнциями групп и конгруэнциями тернарных групп имеются и существенные различия.

Для всякой тернарной подгруппы $< B, [\ ] >$ тернарной группы $< A, [\ ] >$ и любой конгруэнции σ на $< A, [\ ] >$ положим (см., например, [7], с. 65)

$$\sigma B = \{x \in A \mid \exists b \in B, (x, b) \in \sigma\}.$$

Ясно, что

$$\sigma B = \{x \in A \mid B \cap \sigma(x) \neq \varnothing\} = \bigcup_{b \in B} \sigma(b).$$

Легко проверяется, что $< \sigma B, [\ ] >$ – тернарная подгруппа в $< A, [\ ] >$.

Согласно предложению 7.4 [2], если $< B, [\ ] >$ – полуинвариантная тернарная подгруппа тернарной группы $< A, [\ ] >$, то на $< A, [\ ] >$ существует конгруэнция

$$\rho_B = \{(a, b) \mid [aBB] = [bBB]\},$$

классы которой совпадают со смежными классами $< A, [\ ] >$ по $< B, [\ ] >$: $\rho_B(a) = [aBB]$.

Теорема 1. Пусть $< B, [\ ] >$ – тернарная подгруппа, ρ - конгруэнция тернарной группы $< A, [\ ] >$. Тогда

$$\rho B = [\rho(a)\,\bar{a}\,B] = [B\,a\,\rho(a)] = [\rho(\bar{a})aB] = [Ba\rho(\bar{a})]$$

для любого $a \in A$.

Если в теореме 1 положить $a \in B$, то $\bar{a} \in B$ и значит верно

Следствие 1. Пусть $< B, [\ ] >$ – тернарная подгруппа, ρ – конгруэнция тернарной группы $< A, [\ ] >$, $a \in B$. Тогда

$$\rho B = [\rho(a)BB] = [BB\rho(a)] = [\rho(\bar{a})BB] = [BB\rho(\bar{a})].$$

Если $< C, [\ ] >$ – полуинвариантная тернарная подгруппа тернарной группы $< A, [\ ] >$. ρ_C – конгруэнция, определяемая $< C, [\ ] >$, то $\rho_C(a) = C$ для любого $a \in C$. Поэтому из теоремы 1, учитывая $\bar{a} \in C$, получаем

Следствие 2 [2]. Пусть $< B, [\ ] >$ и $< C, [\ ] >$ – тернарные подгруппы тернарной группы $< A, [\ ] >$, причём $< C, [\ ] >$ – полуинвариантна в $< A, [\ ] >$. Тогда

$$\rho_C B = [CCB] = [BCC].$$

Из следствия 2, ввиду леммы 5.22 [2], вытекает

Следствие 3. Пусть $< B, [\ ] >$ и $< C, [\ ] >$ – тернарные подгруппы тернарной группы $< A, [\ ] >$, причём $< C, [\ ] >$ – полуинвариантна в $< A, [\ ] >$, $B \cap C \neq \varnothing$. Тогда

$$\rho_C B = [CBB] = [BBC].$$

Теорема 2. Пусть $<B,[\ ]>$ – тернарная подгруппа, ρ и σ – конгруэнции тернарной группы $<A,[\ ]>$. Тогда

$$(\rho\sigma)B = [\rho(a)\bar{a}\,\sigma(a)\bar{a}\,B] = [\rho(a)\bar{a}\,B\,\bar{a}\,\sigma(a)] = [B\,\bar{a}\,\rho(a)\,a\,\sigma(a)],$$

$$(\rho\sigma)B = [\rho(a)a\sigma(\bar{a})aB] = [\rho(\bar{a})aBa\sigma(\bar{a})] = [Ba\rho(\bar{a})a\sigma(\bar{a})]$$

для любого $a \in A$.

Следствие 4. Пусть ρ и σ – конгруэнции тернарной группы $<A,[\ ]>$, $a \in B$. Тогда

$$(\rho\sigma)B = [\rho(a)\bar{a}\,\sigma(a)BB] = [BB\rho(a)\bar{a}\,\sigma(a)],$$

$$(\rho\sigma)B = [\rho(\bar{a})a\sigma(\bar{a})BB] = [BB\rho(\bar{a})a\sigma(\bar{a})].$$

Следствие 5. Если $<C,[\ ]>$ – полуинвариантная тернарная подгруппа тернарной группы $<A,[\ ]>$, то справедливы следующие утверждения:

1) $(\rho_C\sigma)B = [CC\sigma(a)\bar{a}\,B] = [CC\sigma(\bar{a})aB]$ для любого $a \in C$;

2) если $B \cap C \neq \varnothing$, то

$$(\rho_C\sigma)B = [CC\sigma(a)BB] = [CC\sigma(\bar{a})BB]$$

для любого $a \in B \cap C$.

Следствие 6. Если $<C,[\ ]>$ и $<D,[\ ]>$ – полуинвариантные тернарные подгруппы тернарной группы $<A,[\ ]>$, то справедливы следующие утверждения:

1) если $C \cap D \neq \varnothing$, то $(\rho_C\rho_D)B = [CCDDB]$;

2) если $B \cap C \cap D \neq \varnothing$, то $(\rho_C\rho_D)B = [CCDBB] = [CDDBB]$.

Число равенств в следствиях 5 и 6 можно увеличить, если воспользоваться полуинвариантностью $<C,[\ ]>$ и $<D,[\ ]>$ в $<A,[\ ]>$.

УДК 519.542

О ГРУППАХ С КОПРОСТЫМИ АВТОМОРФИЗМАМИ.

Гарнет В.Э.

УО «Могилёвский государственный университет продовольствия»
Могилёв, Беларусь

Используются стандартные обозначения и терминология, принятые в теории конечных групп, которые можно найти, например, в [1].

Здесь всегда X - конечная группа, допускающая автоморфизм y простого порядка r, $(|X|, r) = 1$, $B = C_X(y)$-стабилизатор автоморфизма y.

В работе [2] доказана следующая

Теорема. Пусть конечная группа X допускает копростой автоморфизм y простого порядка r. Если $B = C_X(y)$ есть силовская подгруппа нечётного порядка, то X - разрешимая группа.