

УДК 532.33

## РАВНОВЕСИЕ ОДНОРОДНОГО ТЕЛА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ НА ШЕРОХОВОЙ НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

*А.Я. Протас, А.И. Ермаков, М.А. Киркор*

В работе теоретически и экспериментально проанализированы статические условия нарушения равновесия однородного прямоугольного тела на наклонной плоскости с трением. Показано, при каких соотношениях угла наклона, размеров тела и коэффициента трения тело будет либо покоиться, либо в какой форме будет нарушаться его равновесие. Предложена номограмма, определяющая эти условия.

### Введение

На предприятиях пищевой промышленности при транспортировке как пищевых продуктов, так и тары широко используются ленточные конвейеры, а также гравитационные устройства (наклонные желобы или лотки). Применение данных транспортирующих машин ограничено их углом наклона к горизонту [1]. На практике известно много случаев, когда различные тела могут быть неподвижны или могут двигаться по наклонной плоскости, преодолевая силы трения. Это могут быть ящики с пищевыми продуктами, строительные блоки, коробки и т.п. В одних случаях они надежно остаются в равновесии, т.е. покоятся, в других – равновесие может быть нарушено. При каких условиях происходит нарушение этого равновесия представляет практический интерес.

Тело по плоскости может скользить, но при определенных условиях оно может опрокинуться или даже кувыркаться. Если для спускаемой по наклонной плоскости пустой картонной коробки опрокидывание не приведет к отрицательным последствиям, то для ящиков со стеклянной тарой это недопустимо.

Известные в литературе подходы [2] рассматривают, в основном, равновесие тела по скольжению, если не считать устойчивость против опрокидывания автомобилей и строительных кранов. Однако что произойдет раньше – проскальзывание или опрокидывание тела – такой анализ не освещается. В то же время для определения устойчивости автомобилей подобные исследования проводятся, но, как правило, для горизонтальных участков.

Целью работы является определение условий, при которых тело будет покоиться на шероховатой наклонной плоскости или совершать движение определенного характера.

### Результаты исследований и их обсуждение

Рассмотрим однородное тело прямоугольной формы длиной  $a$  и высотой  $b$ , находящееся на наклонной плоскости (рисунок 1).

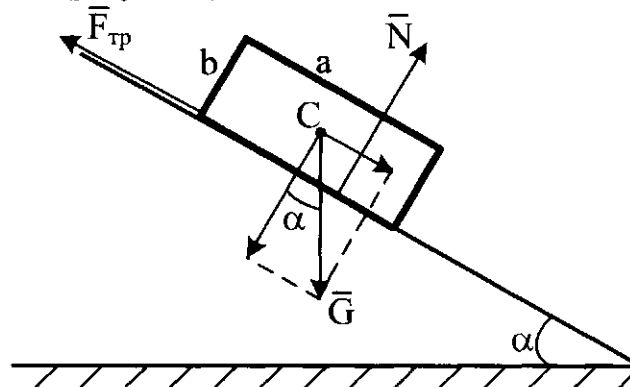


Рисунок 1 – Схема сил для тела при отсутствии скольжения

На тело действуют сила тяжести  $G$ , приложенная в центре тяжести  $C$ , нормальная реакция поверхности  $N$ , которую как равнодействующую опорных реакций приложим к телу снизу со смещением в сторону возможного движения, и сила трения  $F_{тр}$ , как равнодействующая элементарных сил трения по всей площади соприкосновения.

Тогда равновесие тела по скольжению возможно при соблюдении условия

$$G \sin \alpha = mg \sin \alpha \leq F_{тр} = Nf = f mg \cos \alpha, \quad (1)$$

где  $\alpha$  – угол наклона плоскости к горизонту;

$f$  – коэффициент трения скольжения.

Это означает, что тело не будет скользить по наклонной плоскости при условии

$$\operatorname{tg} \alpha \leq f. \quad (2)$$

Если угол наклона плоскости к горизонту превысит указанное значение, то равновесие будет нарушено и тело будет скользить.

Рассмотрим случай, когда у наклонной плоскости большой коэффициент трения  $f$  и при увеличении угла наклона плоскости  $\alpha$  равновесие по скольжению не нарушается, но становится возможным опрокидывание тела. В этом случае схема сил, действующих на тело, отличается от рассмотренной выше и представлена на рисунке 2.

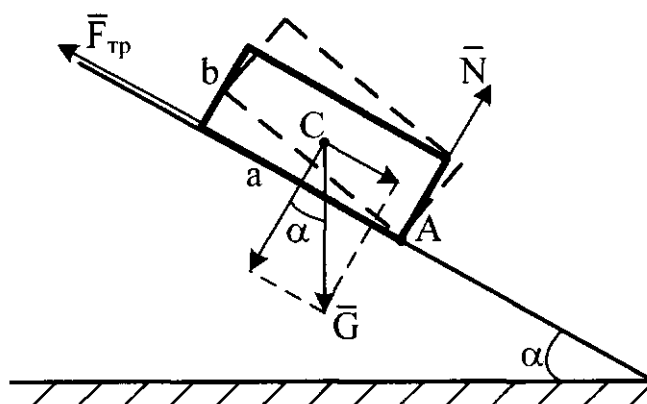


Рисунок 2 – Схема сил для тела, когда оно может скользить или опрокидываться

Сила тяжести  $G$  остается приложенной в центре тяжести  $C$ , но ее линия действия может переместиться даже за точку  $A$ , через которую проходит возможная ось поворота. Поскольку пятно контакта тела с плоскостью при опрокидывании переходит в ось поворота, то нормальную реакцию  $N$  можно считать также приложенной в точке  $A$ . В этом случае силу трения можно считать как сосредоточенную силу.

При отсутствии скольжения опрокидывающий момент относительно точки  $A$  (до отрыва тела от поверхности) создается за счет составляющей силы тяжести  $G$ , параллельной наклонной плоскости, и реакцией  $N$ . При нарушении поверхности контакта тела с плоскостью (контакт остается только по оси поворота) нормальная реакция  $N$  будет приложена в точке контакта (точка  $A$ ), а значит, момента относительно этой точки она составлять не будет. Следовательно, условие отсутствия опрокидывания тела (при отсутствии проскальзывания) можно записать в виде

$$x mg \cos \alpha \geq y mg \sin \alpha, \quad (3)$$

где  $x$  и  $y$  – координаты центра тяжести тела, используемые в качестве плеч для определения опрокидывающего момента, м.

В данном случае принято  $x = a/2$ ,  $y = b/2$ .

Сила трения скольжения ни в опрокидывающий, ни в восстанавливающий моменты не входит, а значит условие (3) можно представить в виде

$$\operatorname{tg}\alpha \leq a/b. \quad (4)$$

Это означает, что при большом коэффициенте трения (когда тело не скользит) его равновесие может быть нарушено опрокидыванием. Это произойдет либо при чрезмерном увеличении угла наклона плоскости к горизонту, либо при уменьшении соотношения размеров тела  $a/b$ .

При нарушении равновесия по скольжению горизонтальная составляющая силы тяжести ( $mg\sin\alpha$ ) уже не может в полной мере участвовать в опрокидывающем моменте, т.к. она превышает силу трения. Следовательно, опрокидывающий момент может создать только составляющая силы тяжести, параллельная наклонной плоскости, и равная силе трения, но приложенная в точке С. Таким образом, момент опрокидывающей пары сил можно представить в виде

$$M_{\text{опр}} = F_{\text{тр}} y. \quad (5)$$

Тогда для восстанавливающей пары сил момент можно представить в виде

$$M_{\text{восст}} = x mg\cos\alpha = N x. \quad (6)$$

Отсюда получаем условия отсутствия опрокидывания тела при начинающемся скольжении

$$x mg\cos\alpha \geq F_{\text{тр}} y \quad (7)$$

или, с учетом выражения (1):

$$a/b \geq f. \quad (8)$$

Это означает: чтобы скользящее тело начало еще и опрокидываться, необходимо, чтобы отношение его длины к высоте ( $a/b$ ) превысило величину коэффициента трения скольжения.

Исходя из вышеизложенного, возможны четыре состояния тела на наклонной поверхности, условия которых представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Условия состояния тела на наклонной плоскости

Состояние тела	Условия, определяющие состояние тела	
Покой	$\operatorname{tg}\alpha \leq f$	$\operatorname{tg}\alpha \leq a/b$
Опрокидывание без скольжения	$\operatorname{tg}\alpha \leq f$	$\operatorname{tg}\alpha > a/b$
Скольжение без опрокидывания	$\operatorname{tg}\alpha > f$	$a/b \geq f$
Опрокидывание со скольжением	$\operatorname{tg}\alpha > f$	$a/b < f$

Для подтверждения теоретических данных были проведены экспериментальные исследования с использованием однородных образцов в форме параллелепипедов со сторонами различной длины. В зависимости от грани, на которую опирался образец, соотношение его размеров ( $a/b$ ) составляло 0,25; 0,5 и 1. Кроме того, была изготовлена поворотная плоскость с угловым лимбом и фиксатором с градуировкой в  $1^\circ$ .

Величину коэффициента трения определяли на той же плоскости по углу ее наклона, при котором нарушалось равновесие. Небольшой разницей коэффициента трения движения и покоя пренебрегли, хотя коэффициент трения страгивания оказывался несколько выше.

Для экспериментальных исследований были приняты два коэффициента трения  $f = 0,34$  и  $f = 0,68$  [3]. Изменение коэффициента трения было достигнуто за счет покрытия лаком боковой грани одного из образцов.

Полученные экспериментальные данные представлены в таблице 2 [4].

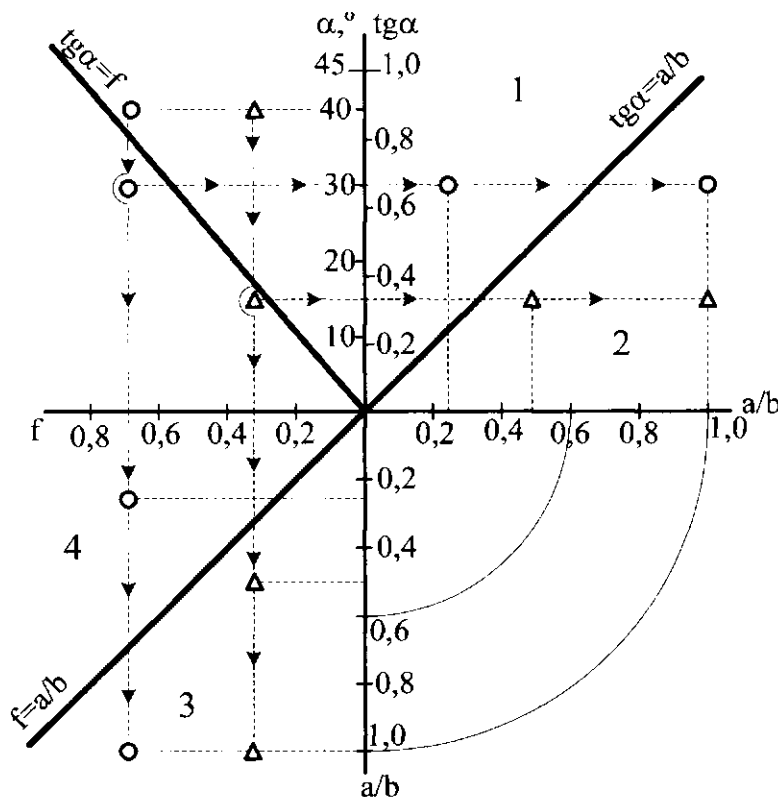
Таблица 2 – Экспериментальные значения условий состояния тела на наклонной плоскости

Угол наклона плоскости $\alpha$ , °	Коэффициент трения $f$	Соотношение размеров $a/b$	Состояние тела
15	0,34	0,5	Покой
		1,0	Покой
30	0,68	0,25	Опрокидывание без скольжения
		1,0	Покой
40	0,34	0,5	Скольжение без опрокидывания
		1,0	Скольжение без опрокидывания
		0,25	Опрокидывание со скольжением*
	0,68	1,0	Скольжение без опрокидывания

\* – после опрокидывания соотношение  $a/b$  изменялось, то для учета взято только исходное состояние

Как видно из таблицы 2, все три величины весьма существенно сказываются на том, в какой форме нарушается равновесие тела. Еще один возможный случай, так называемое «кувыркание» тела, не рассматривался, так как существенное влияние мог оказывать динамический фактор.

Для практического использования полученных результатов была разработана номограмма, представленная на рисунке 3.



○ - экспериментальные значения при  $f=0,34$ ; △ - экспериментальные значения при  $f=0,68$ ;

1 – опрокидывание без скольжения; 2 – покой; 3 – скольжение без опрокидывания;  
4 – опрокидывание со скольжением

Рисунок 3 – Номограмма состояний тела на шероховатой наклонной плоскости

Если точка, определяемая величинами  $\alpha$  и  $f$ , оказывалась ниже линии  $\operatorname{tg}\alpha = f$ , то другие оценочные точки, учитывающие соотношения размеров  $a$  и  $b$ , откладывались по горизонтали вправо. В противном случае оценочные точки откладывались вниз, что показано на рисунке стрелками. Для большего удобства параллельно шкале  $\operatorname{tg}\alpha$  приведена шкала  $\alpha$  в градусах. Для того чтобы графически изобразить линии  $\operatorname{tg}\alpha = a/b$  и  $a/b = f$ , потребовалось ввести две шкалы  $a/b$ .

Например, при угле  $\alpha = 40^\circ$  и коэффициенте трения  $f = 0,34$  оказалось, что равновесие тела по скольжению отсутствует, а соотношения  $a/b = 0,5$  и  $a/b = 1$  были расположены ниже линии  $f = a/b$ , что соответствует случаю скольжения без опрокидывания. Все другие экспериментально проверенные соотношения также полностью подтвердили теоретические выводы.

Все это позволяет отметить на номограмме четыре зоны, одна из которых определяет условия полного покоя тела, а три других – различные случаи нарушения равновесия. Левый верхний квадрант в осях  $\operatorname{tg}\alpha$  и  $f$  определяет только равновесие или неравновесие по скольжению.

### Заключение

В результате проведенных исследований показано, что поведение однородного тела прямоугольной формы на шероховатой наклонной плоскости можно заранее предопределить, если известны три параметра: угол наклона плоскости к горизонту  $\alpha$ , коэффициент трения скольжения  $f$  и отношение длины тела к его высоте  $a/b$ . Полученные результаты можно распространить и на неоднородное тело, для которого заданы размеры опорной поверхности и положение центра тяжести относительно этой поверхности.

### Литература

- 1 Александров, М.П. Подъемно-транспортные машины: учебник для машиностроит. спец. вузов / М.П. Александров. – 6-е изд., перераб. – М.: Высш. шк., 1985. – 520 с.
- 2 Добронравов, В.В. Курс теоретической механики / В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1983. – 575 с.
- 3 Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов / С.М. Тарг. – М.: Высшая школа, 2006. – 416 с.
- 4 Протас, А.Я. К вопросу равновесия тела на наклонной плоскости / А.Я. Протас, А.И. Ермаков, М.А. Киркор // Техника и технология пищевых производств: тез. докл. X Междунар. науч.- техн. конф., Могилев, 23-24 апр., 2015 г. / Мог. гос. ун-т прод.; редкол.: А.В. Акулич [и др.]. – Могилев, 2015. – С. 238.

*Поступила в редакцию 24.03.2015*